Soluciones Periódicas a Problemas con Medidas Mediante el Método Shooting

Lorenzo Sierra [1]-Sonia Acinas[1] - Fernando Mazzone[1,2,3]

[1]Universidad Nacional de La Pampa

[2]CONICET - [3]Universidad Nacional de Río Cuarto

Descripción del problema

Queremos encontrar soluciones al problema periódico con medidas

$$\begin{cases} d\varphi = f(t, \varphi(t)) d\mu \\ \varphi(0) = \varphi(T) \end{cases} \qquad (P)$$

donde μ es una medida de Borel finita, $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ está acotada y es localmente Lipschitz respecto a las segunda variable.

Descripción del problema

Queremos encontrar soluciones al problema periódico con medidas

$$\begin{cases} d\varphi = f(t, \varphi(t))d\mu \\ \varphi(0) = \varphi(T) \end{cases} \tag{P}$$

donde μ es una medida de Borel finita, $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ está acotada y es localmente Lipschitz respecto a las segunda variable.

Definición

Entendemos como solución de (P), a una función $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $\varphi(0) = \varphi(T)$, $\varphi \in BV([0, T])$, es continua a izquierda, y para todo conjunto de Borel A vale que

$$\mu_\varphi(A) = \int_A f(t, \varphi(t))\, d\mu(t).$$

Método Shooting

Usaremos el método Shooting, partimos de una solución φ_λ al problema de valores iniciales

$$\begin{cases} d\varphi = f(t, \varphi(t))d\mu \\ \varphi(0) = \lambda \end{cases} \qquad (PVI)$$

y variar el parámetro λ hasta que $\varphi_\lambda(T) = \lambda$.

Método Shooting

Usaremos el método Shooting, partimos de una solución φ_λ al problema de valores iniciales

$$\begin{cases} d\varphi = f(t,\varphi(t))d\mu \\ \varphi(0) = \lambda \end{cases} \qquad (PVI)$$

y variar el parámetro λ hasta que $\varphi_\lambda(T) = \lambda$.
Vamos determinar hipótesis para que

Método Shooting

Usaremos el método Shooting, partimos de una solución φ_λ al problema de valores iniciales

$$\begin{cases} d\varphi = f(t, \varphi(t))d\mu \\ \varphi(0) = \lambda \end{cases} \qquad (PVI)$$

y variar el parámetro λ hasta que $\varphi_\lambda(T) = \lambda$.
Vamos determinar hipótesis para que

- Exista solución del *PVI* y este bien definida.

Método Shooting

Usaremos el método Shooting, partimos de una solución φ_λ al problema de valores iniciales

$$\begin{cases} d\varphi = f(t, \varphi(t))d\mu \\ \varphi(0) = \lambda \end{cases} \qquad (PVI)$$

y variar el parámetro λ hasta que $\varphi_\lambda(T) = \lambda$.
Vamos determinar hipótesis para que

- Exista solución del *PVI* y este bien definida.
- Las soluciones φ_λ estén definidas en el intervalo $[0, T]$.

Método Shooting

Usaremos el método Shooting, partimos de una solución φ_λ al problema de valores iniciales

$$\begin{cases} d\varphi = f(t, \varphi(t))d\mu \\ \varphi(0) = \lambda \end{cases} \qquad (PVI)$$

y variar el parámetro λ hasta que $\varphi_\lambda(T) = \lambda$.
Vamos determinar hipótesis para que

- Exista solución del *PVI* y este bien definida.
- Las soluciones φ_λ estén definidas en el intervalo $[0, T]$.
- Exista al menos un valor de λ para el cual $\varphi_\lambda(T) = \lambda$.

Antecedentes

En el trabajo

Gastón Beltritti, Stefania Demaria, Graciela Giubergia, Fernando Mazzone.
THE PICARD-LINDELÖF THEOREM AND CONTINUATION OF SOLUTIONS FOR MEASURE DIFFERENTIAL EQUATIONS

demuestran que bajo las hipótesis

P-*1*) Para cada $x \in \mathbb{R}^n$, $f(t,x)$ μ-medible en la variable t.

P-*2*) Para cada $t \in [0,T]$, $f(t,x)$ es continua y acotada en la variable x, .

P-*3*) Existen $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $|f(t,x)| \leqslant a|x| + b$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

P-*4*) Existe $L \in \mathbb{R}$ tal que para $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leqslant L\,|x-y|\,.$$

Existe solución al problema de valores iniciales PVI.

Condición de teletransportación

Definición

Diremos que el campo $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *cumple la condición de teletransportación en* $B(0, R)$, *si para todo* $x \in \overline{B(0, R)}$ *vale que*

$$x + f(t, x)\mu\{t\} \in \overline{B(0, R)}$$

donde μ *es una medida de Borel positiva y finita.*

Resultado.

Teorema

Sea $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *que cumple con las hipótesis P-1) a P-4), y supongamos que*

P-5 Existe $B(0, R) \subset \mathbb{R}^n$ *para la cual* f *cumple la condición de teletransportación .*

P-6 Para todo $|u| = R$ *y* $t \in [0, T]$, *si* $\mu(\{t\}) = 0$ *entonces*

$$f(t, u) \cdot u < 0.$$

Entonces existe φ_λ *solución del problema P, es decir* $\varphi_\lambda(0) = \varphi_\lambda(T)$.

Operador de Poincaré

Definición

Sea $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *el operador que a cada valor inicial* λ *le asigna el valor* $\varphi_\lambda(T)$*, es decir* $P(\lambda) = \varphi_\lambda(T)$*. LLamaremos a* P *operador de Poincaré.*

Si existiese un valor λ tal que $\varphi_\lambda(0) = \varphi_\lambda(T)$, entonces ese valor sería un punto fijo del operador de Poincaré, es decir $P(\lambda) = \lambda$.
Para ver si el operador de Poincaré tiene puntos críticos vamos a usar el Teorema de punto fijo de Brouwer.

Esquema de la demostración

Teorema de Brouwer

Sea $B(0,R)$ una bola de $\mathbb{R}^n$ y sea P continuo y $P\left(\overline{B(0,R)}\right) \subset \overline{B(0,R)}$.

Entonces existe $x \in \overline{B(0,R)}$ tal que $P(x) = x$.

Por lo tanto probamos que con las hipótesis P-*1*) a P-6)

- El operador P está bien definido, es decir, la solución al problema de valores iniciales φ_λ está definida en todo el intervalo $[0, T]$.

Esquema de la demostración

Teorema de Brouwer

Sea $B(0,R)$ *una bola de* $\mathbb{R}^n$ *y sea* P *continuo y* $P\left(\overline{B(0,R)}\right) \subset \overline{B(0,R)}$*.*
Entonces existe $x \in \overline{B(0,R)}$ *tal que* $P(x) = x$*.*

Por lo tanto probamos que con las hipótesis P-*1*) a P-6)

- El operador P está bien definido, es decir, la solución al problema de valores iniciales φ_λ está definida en todo el intervalo $[0, T]$.
- El operador es continuo.

Esquema de la demostración

Teorema de Brouwer

Sea $B(0,R)$ una bola de $\mathbb{R}^n$ y sea P continuo y $P\left(\overline{B(0,R)}\right) \subset \overline{B(0,R)}$.
Entonces existe $x \in \overline{B(0,R)}$ tal que $P(x) = x$.

Por lo tanto probamos que con las hipótesis P-*1*) a P-6)

- El operador P está bien definido, es decir, la solución al problema de valores iniciales φ_λ está definida en todo el intervalo $[0, T]$.
- El operador es continuo.
- Existe $R > 0$ para el cual $P\left(\overline{B(0,R)}\right) \subset \overline{B(0,R)}$.

Continuidad del operador P

Sea φ la solución del problema P en el intervalo $I = [0, \delta)$ y $x_0 \in \mathbb{R}^n$, tal que $\varphi(0) = x_0$. Sea $\tilde{x_0} \in \overline{B(x_0, r/2)}$ y sea $\tilde{\varphi}$ una solución para la condición inicial $\tilde{\varphi}(0) = \tilde{x_0}$. Entonces

$$\|\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t)\| \leqslant \|x_0 - \tilde{x_0}\| + L \int_{[0,t)} \|\varphi(r) - \tilde{\varphi}(t)\| \, d\mu(r)$$

Continuidad del operador P

Sea φ la solución del problema P en el intervalo $I = [0, \delta)$ y $x_0 \in \mathbb{R}^n$, tal que $\varphi(0) = x_0$. Sea $\tilde{x_0} \in \overline{B(x_0, r/2)}$ y sea $\tilde{\varphi}$ una solución para la condición inicial $\tilde{\varphi}(0) = \tilde{x_0}$. Entonces

$$\|\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t)\| \leqslant \|x_0 - \tilde{x_0}\| + L \int_{[0,t)} \|\varphi(r) - \tilde{\varphi}(t)\| \, d\mu(r)$$

Desigualdad de Gronwall

Sea μ una medida de Borel, finita y positiva, y $u : [0, T] \to \mathbb{R}$ tal que $u \in L^1(\mu)$. Si $u(t) \leqslant c + \int_{[0,t)} u(r) \, d\mu(r)$ entonces

$$u(t) \leqslant cK(t)e^{K(t)\bar{\mu}([0,t))}$$

donde $K(t) = \prod_{\substack{\tau[0,t) \\ \mu(\{\tau\} \neq 0)}} (1 + \mu(\{\tau\}))$, $\bar{\mu} \ll \mu$ y continua.

Solución en todo el intervalo $[0, T]$

Para demostrar que el operador P está bien definido, usamos el siguiente teorema demostrado en [B-D-G-M]

Teorema

Sea μ una medida de Borel finita, f localmente Lipschitz respecto a la variable vectorial y φ la solución máxima de P en $I = [t_0, t_1)$. Entonces una y sólo una de las afirmaciones es verdadera:

i Para todo $K \Subset \Omega = [0, T) \times \mathbb{R}^n$ existe $t_2 \in I$ tal que $(t, \varphi(t)) \notin K$ para todo $t \in (t_2, t_1)$.

ii Existe el límite $x_1 = \lim_{t \to t_1^-} \varphi(t)$, tal que $(t_1, x_1) \in \Omega$ y

$$(t_1, \varphi(t_1) + f(t_1, \varphi(t_1))\mu(\{t_1\})) \notin \Omega.$$

Supongamos que φ_λ es la solución al *PVI* y que esta definida en el intervalo $[0, t_1)$, donde $t_1 < T$, luego se debe cumplir una de las dos condiciones anteriores.

- De la hipótesis P-*3*) mostramos que existe $R > 0$ tal que $||\varphi_\lambda|| \leqslant R$.
- La primera condición no se cumple pues para $\epsilon = \dfrac{T - t_1}{2}$ el compacto
$$K_\epsilon = [0, t_1] \times B(0, R) \Subset [0, T) \times \mathbb{R}^n$$
y todo par $(t, \varphi(t)) \in K_\epsilon$.
- La segunda tampoco pues
$$(t_1, \varphi(t_1) + f(t_1, \varphi(t_1))\mu(\{t_1\})) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n.$$

Por lo tanto, la solución φ_λ debe estar definida para todo $t \in [0, T]$.

$P\left(\overline{B(0,R)}\right) \subset \overline{B(0,R)}$

- La hipótesis P-5 del teorema, nos dice que existe una bola $B(0,R)$ donde para todo $t \in [0,T]$ y $x \in \overline{B(0,R)}$ vale que

$$x + f(t,x)\mu(\{t\}) \in \overline{B(0,R)}$$

  Lo cual nos asegura que si partimos de una condición inicial $x_0 \in B(0,R)$, la solución no se sale de $\overline{B(0,R)}$.
- De la hipótesis P-6 mostramos que si partimos de una condición inicial $x_0 \in \partial B(0,R)$ la solución se "movera" hacia el interior de la bola.

Por lo tanto $P\left(\overline{B(0,R)}\right) \subset \overline{B(0,R)}$.

Conclusión

- Las hipotesis P-*1*) a P-*4*) nos aseguran que el operador de poincaré esta definido en todo el intervalo $[0, T]$.
- Con la desigualdad de Gronwall probamos que el operador de poincaré es continuo.
- De las hipótesis P-5 y P-6 probamos que $P\left(\overline{B(0,R)}\right) \subset \overline{B(0,R)}$.

Comentarios finales

Si queremos resolver

$$\begin{cases} du' = g(t, u(t))\, d\nu \\ u'(0) - u'(T) = u(0) - u(T) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

reducimos el orden y transformamos el problema en el siguiente sistema, tomando $u' = v$ y llamando $\varphi(t) = (u(t), v(t))$

$$\begin{cases} d\varphi = (v, g(t, u(t))) \cdot\ d(\lambda, \nu) \\ \varphi(0) - \varphi(T) = 0 \end{cases}$$

Donde λ representa la medida de Lebesgue.

Ahora definimos la medida positiva $\mu = |\lambda| + |\nu|$, entonces $\nu \ll \mu$ y $\lambda \ll \mu$, y por el Teorema de Lebesgue-Radon-Nikodyn, existen f_ν y f_λ $\mu-$integrables tal que

$$\int_A h(t)\, d\nu = \int_A h(t) \cdot f_\nu(t)\, d\mu \;\text{ y }\; \int_A h(t)\, d\lambda = \int_A h(t) \cdot f_\lambda(t)\, d\mu.$$

Por lo tanto, el problema de segundo orden con medida, (1) se transformó en un problema de primer orden con una medida absolutamente continua respecto de la primera,

$$\begin{cases} d\varphi = (v \cdot f_\lambda, g(t, u(t) \cdot f_\nu))\, d\mu \\ \varphi(0) - \varphi(T) = 0 \end{cases}$$

¡Muchas gracias por su atención!

Referencias:

PABLO AMSTER- Topological Methods in the Study of Boundary Value Problems, Springer 2014.

GASTÓN BELTRITTI, STEFANIA DEMARIA, GRACIELA GIUBERGIA, FERNANDO MAZZONE -The Picard-Lindelof theorem and continuation of solutions for measure diferential equations.

NORBERTO FAVA Y FELIPE ZO- Medida e Integral de Lebesgue, RED OLIMPICA 1996.
Stieltjes Integral: A Practical Introduction, Springer Science & Business Media, 2000. Zbl 0948.28001, DOI 10.1007/978-1-4612-1174-7.

D. APPLEBAUM- Limits, Limits Everywhere: The Tools of Mathematical Analusis.

Contacto:

- FERNANDO MAZZONE: fmazzone@exa.unrc.edu.ar
- SONIA ACINAS: sonia.acinas@gmail.com
- LORENZO SIERRA: lorenzofsierra@gmail.com